

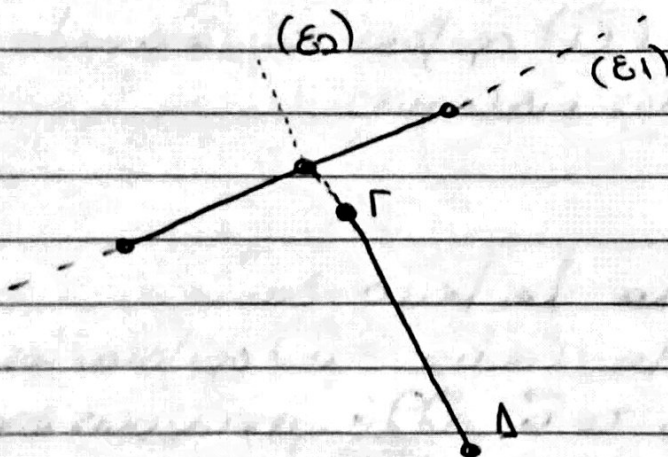
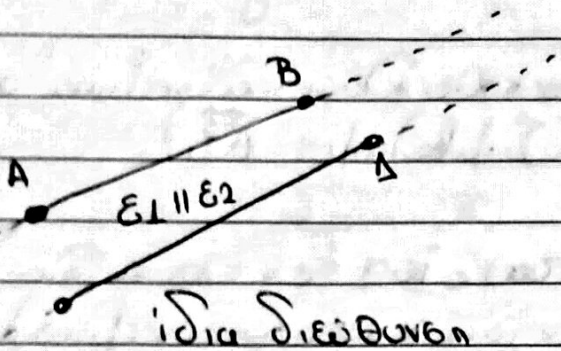
08-03-17

ορίσμος Ένα ευθύγραφο τμήμα στο οποίο έχουμε ορίσει αρχή και τέλος $\textcircled{1}$ λέγεται προσανατολισμένο (ευθυνοίσιμος AB) $(AB \neq BA)$ αρχή τέλος

$\textcircled{2}$ Δύο προσανατολισμένα ευθ λέγεται ότι έχουν την ίδια διεύθυνση αν οι ευθείες στις οποίες ανήκουν είναι παράλληλες

$\textcircled{3}$ Θα λέγεται ότι δύο προς ευθ της ίδιας διεύθυνσης έχουν ίδια φορά αν ταωρίζοντας τις αρχές τους $\rightarrow$ τα περάσει τους βρίσκονται προς το ίδιο μέρος.

$\textcircled{4}$ Μέτρο ενός προς ευθ τμήματος ορίζεται ως το μήκος αυτού (απλ $|AB|$)

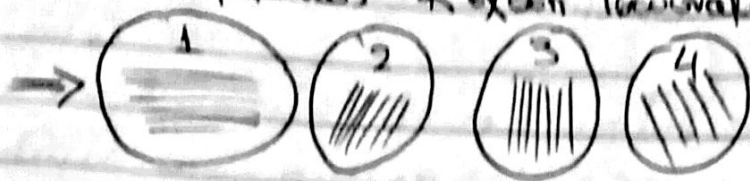


όχι ίδια διεύθυνση

π.χ. (1) $\Lambda = \{ \text{είνολο ευθειών} \} \subseteq \mathbb{R}^2$ { το ευχέτο να είναι ευθείες }

Έστω $a, b \in \Lambda$. Ορίζω την σχέση $a R b \Leftrightarrow a \parallel b$

Προφανώς R σχέση ισοδυναμίας $\rightarrow$ διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας



□

(2) Στο σύνολο των παραλληλολογικών ευθ. τμημάτων ορίζω με R σχέση $AB R \Gamma\Delta \Leftrightarrow$ τα $AB, \Gamma\Delta$ έχουν ίδιο μέτρο διατεταγμένης.

Αποδεικνύω ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας $\rightarrow$ έχουμε κλάσεις ισοδυναμίας

□

ορισμός: Κάθε κλάση $[\text{διάνυσμα}]$ "την κάθε κλάση ισοδυναμίας" από την παραπάνω σχέση (π.χ. (2)). (Συμβολισμός $\vec{AB}$)

ορισμός: Δύο διανύσματα καλούνται ίσα αν έχουν ίδια διεύθυνση, ίδιο μέτρο (αν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας)

Ειδικά διανύσματα

- το μηδενικό διάνυσμα ($\vec{0}$) ορίζεται ως διάνυσμα μηδενικού μήκους και ακαθόριστης διεύθυνσης

$$\vec{AB} = \vec{0}$$

$$A=B$$

είναι το

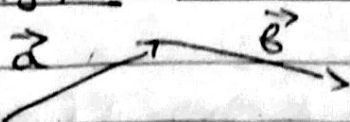
- το μοναδιαίο διάνυσμα με μέτρο ένα
- το αντίθετο διάνυσμα (αφ' $\vec{a} - \vec{a}$) ορίζεται ως το διάνυσμα ίδιου μήκους με το $\vec{a}$ αλλά αντίθετης φοράς.

$\rightarrow$ Στο σύνολο όλων των διανυσμάτων λαμβάνει δομή $\delta\chi$ εφοδιασμένο με την "+" $\vec{a} + \vec{b}$ και "." $\lambda \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}$

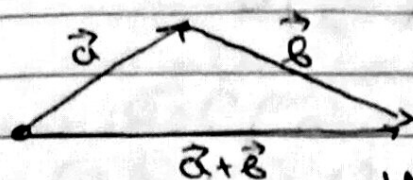
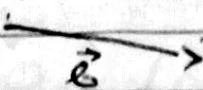
Στο αλγεβρικό πλαίσιο όταν θα βλέπαμε δομή θα εννοούσαμε τους πρόσφυκτους. Όμως γενικότερα η έννοια "δομή" περιλαμβάνει και άλλους χώρους.

Τρόπος πρόσθεσης διανυσμάτων

1^η ηφαίζη



"+"



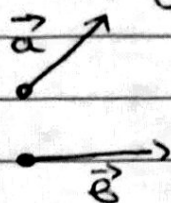
1) Διατηρούμε το ένα διάνυσμα σταθερό π.χ. το $\vec{a}$

2) Μετακινούμε παράλληλα το $\vec{b}$ έτσι ώστε αρχή του $\vec{b}$ να συμπίπτει με το τέλος του $\vec{a}$

3) Το νέο διάνυσμα με αρχή την αρχή του $\vec{a}$ και τέλος το τέλος του $\vec{b}$

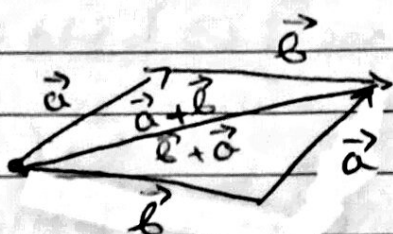
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

* Θα δείξουμε ότι $(1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

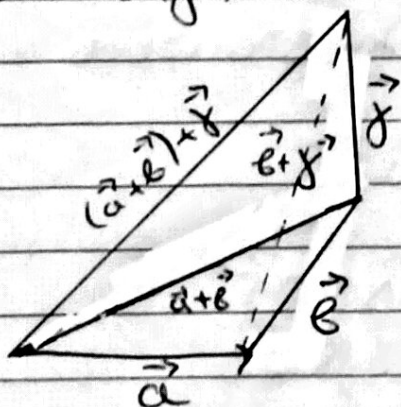


Το $\vec{a} + \vec{b}$ το έχουμε υπολογίσει

Αρκεί να υπολογίσουμε το $\vec{b} + \vec{a}$ (ακολουθώντας το βήματα 1), 2), 3) και κρατώντας σταθερό το $\vec{b}$).



$$(2) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{f}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{f}$$



2^η ηφαίζη "πολ/φος" $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζεται ως ένα νέο διάνυσμα με μέτρο $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

και φορά $(\lambda \vec{a}) = \begin{cases} \text{φορά } \vec{a}, & \text{αν } \lambda > 0 \\ \text{αντίθετη φορά,} & \text{αν } \lambda < 0 \\ \vec{0}, & \text{αν } \lambda = 0 \end{cases}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$$

Πρόταση 1: ① Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι ΓΕ $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$ Τα $\vec{a}, \vec{b}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

$$(\Rightarrow) \vec{a}, \vec{b} \text{ ΓΕ} \Rightarrow \exists (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \quad \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{Έστω π.χ. } \lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) \vec{b}$$

Τα $\vec{a}, \vec{b}$ ίδια διεύθυνση

$$(\Leftarrow) \text{ αν τα } \vec{a}, \vec{b} \text{ ίδιας διεύθυνσης} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ τέω } \vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow 1 \vec{a} + (-\lambda) \vec{b} = \vec{0}, \exists (1, -\lambda) \neq (0, 0) \\ \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ ΓΕ}$$

Πρόταση 2 Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in V$ (μη-μηδενικά)

Είναι ΓΕ $\Leftrightarrow$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο

$$(\Rightarrow) \text{ Έστω } \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ ΓΕ} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0):$$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} = \vec{0}$$

$$\text{Έστω π.χ. } \lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) \vec{b} + \left(-\frac{\nu}{\lambda}\right) \vec{\gamma}$$

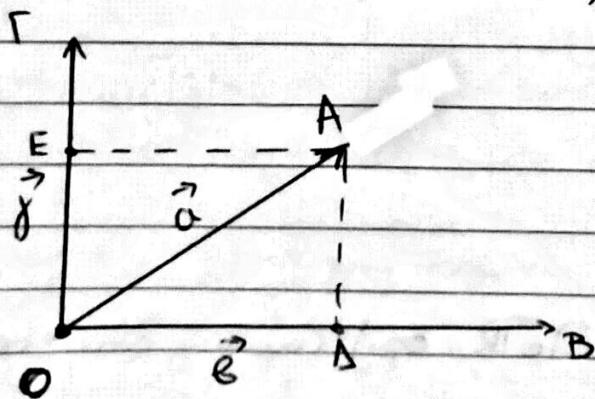
Το $\vec{a}$ βρίσκεται στο επίπεδο των $\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) \vec{b} + \left(-\frac{\nu}{\lambda}\right) \vec{\gamma}$

Το $\vec{a}$ βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{b}, \vec{\gamma}$

$$(\Leftarrow) \text{ Έστω } \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.}$$

Τα μετακινώ (παράλληλα) στο ίδιο σημείο να αλληνοκατασταθούν

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OG} = \vec{\gamma}$$



$$\vec{AD} \parallel \vec{OG}$$

$$\vec{AE} \parallel \vec{OB}$$

$$\vec{a} = \vec{OA} = \vec{OE} + \vec{EA}$$

$$\vec{EA} = \vec{OD}$$

Καθώς $\vec{OD}, \vec{OB}$ ίδια διεύθυνση τότε $\vec{OD} = \lambda \vec{OB} = \lambda \vec{b}$

Καθώς $\vec{OE}, \vec{OG}$ ίδια διεύθυνση τότε $\vec{OE} = \mu \vec{OG} = \mu \vec{\gamma}$

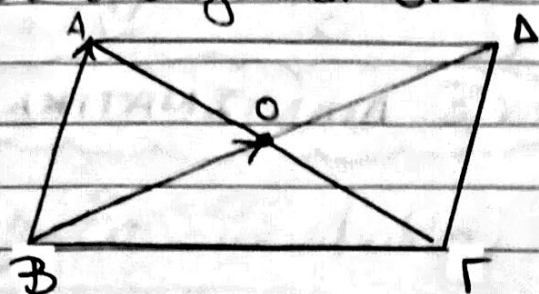
$$\Rightarrow \vec{a} = 2\vec{OB} + \vec{OE} \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{B} + 1\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = (-1)\vec{B} + (-1)\vec{E} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \Gamma E$$

Αγκυρά

\$O\$

① Νόμος διανυσμάτων ενός παραλλ. διχοτομούνται



Αρκεί νδo $\vec{BO} = \frac{1}{2} \vec{BD}$

(νδ διανυσμάτων)



Λύση

Έστω $\vec{BO} = \lambda \vec{BD}$ (*) Θα δείξω ότι $\lambda = \frac{1}{2}$

- 1). $\equiv$ Εκτινάξω με δύο γραμ. ανεξάρτητα διανυσματα και
 εκφράζω αυτά που μας ενδιαφέρουν συναρτήσει αυτών

$$\vec{BO} = \vec{BA} + \vec{AO} \quad \xrightarrow[\text{επειώς } \vec{AB}, \vec{AT} \text{ ειναι } \text{διεσπυνση}]{\vec{AO} = \mu \vec{AT}} \quad \vec{BO} = \vec{BA} + \mu \vec{AT} \quad \xrightarrow{\vec{AT} = \vec{AB} + \vec{BT}} \vec{BO} = \vec{BA} + \mu (\vec{AB} + \vec{BT})$$

$$\vec{BO} = \vec{BA} + \mu (\vec{AB} + \vec{BT}) \quad \xrightarrow{\vec{AB} = -\vec{BA}} \quad \boxed{\vec{BO} = (1-\mu)\vec{BA} + \mu \vec{BT}} \quad (1)$$

$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} \quad \xrightarrow[\vec{ABCD} \text{ παραλλο}]{\vec{AD} = \vec{BT}} \quad \boxed{\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BT}} \quad (2)$$

$$\text{η } (*) \xrightarrow[(2)]{(1)} (1-\mu)\vec{BA} + \mu \vec{BT} = \lambda (\vec{BA} + \vec{BT})$$

$$\Rightarrow (1-\mu)\vec{BA} + \mu \vec{BT} = \lambda \vec{BA} + \lambda \vec{BT}$$

$$\Rightarrow (1-\mu)\vec{BA} + \mu \vec{BT} - \lambda \vec{BA} - \lambda \vec{BT} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (1-\mu-\lambda)\vec{BA} + (\mu-\lambda)\vec{BT} = \vec{0}$$

$\vec{BA}, \vec{BT}, \vec{TA}$
 δεν έχουν ιδιο
 διεσπυνση
 βλέπo
 προσεγγιζo

$$\begin{cases} 1-\mu-\lambda=0 \\ \mu-\lambda=0 \Rightarrow \mu=\lambda \end{cases} \Rightarrow \mu=\lambda=\frac{1}{2}$$

Αρα, $\boxed{\vec{BO} = \frac{1}{2} \vec{BD}}$

□

50\$

✓ Δόκηση ② ✓

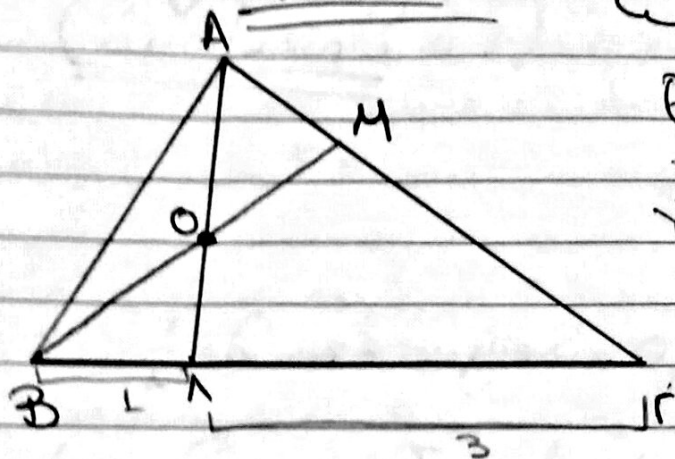
2ο Λειτουργία
των $\vec{BF}$ με $\lambda \cdot \frac{1}{3}$ (1:3)

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$: $\exists$ Λ στην $\vec{BF}$: $\vec{BL} = \frac{1}{3} \vec{BF} = \frac{1}{4} \vec{BF}$

και $\exists$ Μ στην $\vec{AF}$: $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AF} = \frac{1}{3} \vec{AF}$ $\nabla \nabla$
 Νδο η ΑΛ διχοτομεί την $\vec{BM}$.

Λύση

✓ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ



Θέλουμε νδο $\vec{BO} = \frac{1}{2} \vec{BM}$.

Έστω $\vec{BO} = \lambda \vec{BM}$ (*)
 Θδο $\lambda = \frac{1}{2}$

Όπως κάνουμε και την προηγούμενη
 δόκηση (επιλέγω οσα ενδιαφέρει)

Προσολή

$$\vec{BO} = \vec{BA} + \vec{AO} \quad \vec{AO} = \mu \vec{AL} \Rightarrow \vec{BO} = \vec{BA} + \mu \vec{AL}$$

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \vec{BL} \Rightarrow \vec{BO} = \vec{BA} + \mu (\vec{AB} + \vec{BL}) \xrightarrow{\text{υποθέτουμε}} \vec{BL} = \frac{1}{4} \vec{BF}$$

$$\Rightarrow \vec{BO} = (1 - \mu) \vec{BA} + \frac{\mu}{4} \vec{BF} \quad (1)$$

$$\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} \quad \vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AF} \Rightarrow \vec{BM} = \vec{BA} + \frac{1}{3} \vec{AF} \xrightarrow{\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF}}$$

$$\Rightarrow \vec{BM} = \vec{BA} + \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{BF}) = \vec{BA} - \frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{1}{3} \vec{BF}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}\vec{M} = \frac{2}{3}\vec{B}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B}\vec{\Gamma}} \quad (2)$$

$$n \quad (*) \xrightarrow[(2)]{(1)} (1-\mu)\vec{B}\vec{A} + \frac{\mu}{4}\vec{B}\vec{\Gamma} = \lambda \left(\frac{2}{3}\vec{B}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B}\vec{\Gamma} \right)$$

$$\Rightarrow (1-\mu)\vec{B}\vec{A} + \frac{\mu}{4}\vec{B}\vec{\Gamma} = \frac{2\lambda}{3}\vec{B}\vec{A} + \frac{\lambda}{3}\vec{B}\vec{\Gamma}$$

$$\Rightarrow (1-\mu)\vec{B}\vec{A} + \frac{\mu}{4}\vec{B}\vec{\Gamma} - \frac{2\lambda}{3}\vec{B}\vec{A} - \frac{\lambda}{3}\vec{B}\vec{\Gamma} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(1-\mu-\frac{2\lambda}{3}\right)\vec{B}\vec{A} + \left(\frac{\mu}{4}-\frac{\lambda}{3}\right)\vec{B}\vec{\Gamma} = \vec{0}$$

$\vec{B}\vec{A}, \vec{B}\vec{\Gamma}$
 $\vec{B}\vec{A}, \vec{B}\vec{\Gamma}$
 ΓΑ έχουν
 διαφορετική
 διεύθυνση

$$\begin{cases} 1-\mu-\frac{2\lambda}{3}=0 \\ \frac{\mu}{4}-\frac{\lambda}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Άρα, $\vec{B}\vec{O} = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{M}$.

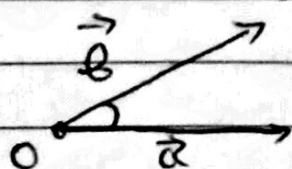
□

Στις 14 και 15 ΔΕΝ ΕΧΟΥΝΕ ΜΑΘΗΝΑ
 ΣΤΙΣ 21 και 28 ΕΧΟΥΝΕ ΒΟΡΕΣ

ορισμός: Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δύο n - n δενικά διανύσματα.

να μεταφέρονται παράλληλα ώστε να έχουν κοινή
 αρχή. Ορίζεται γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$ ($(\vec{a}, \vec{b})$) την
 μικρότερη γωνία που διαγράφει το ένα διάνυσμα (η
 n -αρνητική

έως να "εππέσει" με το $\vec{b}$ (τα πόδια τους στην ίδια
 ευθεία



$$(1) (\vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b})$$

$$(2) (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \text{τα } \vec{a}, \vec{b} \text{ έχουν ίδια φορά.}$$

$$(3) (\vec{a}, \vec{b}) = \pi \Leftrightarrow \text{τα } \vec{a}, \vec{b} \text{ έχουν αντίθετη φορά}$$

$$(4) 0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$$